東北大学数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**東北大学に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　…それをお話しする前に，まずは皆さんは**「細やかな技術」**がきちんと身についていますか？　特に高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんはさまざまな技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野が自覚された時には，速やかに技術を再び磨いておいてください。

さて，数学においてはよく「応用力がない」という声を耳にします。それはいわゆる「公式暗記型」でしか数学を勉強していない人によく見られる気がします。「２次方程式が異なる２つの実数解をもつ」⇒「判別式 $D>0$」といったように。数学で大切なのは「⇒」，いわゆる「プロセス」の部分です。そこに至る「背景」「理由」ですね。それを理解した上で「⇒」をショートカットする分にはまったくかまいませんが。皆さんはちゃんとそれを自覚してきましたか？

そして，「応用力」とはまさに**「プロセス力」**と言えましょう。問題を見たとき，その問題が語っていることをその字面の奥に潜む部分まで読み込み，どこに自分の手で解決しなければならない「壁」があるのかを考えるわけです。さらに壁を越えるために何が必要か。その「鍵」がこの「⇒」に隠されています。そうです，それを選択すべき「理由」があるのです。はたまた，時には形の美しさといった，数学の枠を越えた部分にヒントが隠されていることもあるでしょう。それを見抜き，立式し，磨いた技術をもって計算し答案として仕上げていくのです。

このテキストは，この**「プロセス力」を養うために必要な問題が厳選**されています。後述しますが，このテキストの使い方に従い，画面を通じて伝わってくるものを目で，耳で，肌で吸収し，自分のものとするための**復習を実践**すれば（ここ大事！），無限に広がる数学の世界の扉は確実に開かれます。今日の授業から何が皆さんに伝わってきたのか。それを反芻し，ほかの異なる場面においても**「考える」癖をつける**。それこそが，東北大学に通用する力となりましょう。

そうです。**「この講座だけをやればいい」のではありません**。「傾向と対策」というものは，大学入試には存在しません。「たまたま」出ることが多かった分野に絞って勉強することのリスクが高すぎるからです。扉を開いた後は，自ら歩んでいくことです。そのために必要な問題集もご紹介いたします。扉が開かれているのにその先に進まない人はいないでしょう。なぜならば，その先にあなた方が目指す「東北大学」があるのですから。

この講座を見るたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。決してテクニカルなことは要求しません。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です。その気持ちで授業を聞き，もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開きかけた扉も，時間がたてば自動的に閉まりますよ。**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り開いた時**です。その感動をかみしめながら，一歩，また一歩，東北大学を目指して前進しましょう。何かを見失ったとき，忘れた時、私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

<東北大学数学ⅠAⅡB　目次>

第１講　２次関数・方程式・不等式
第２講　高次方程式，証明
第３講　場合の数・確率
第４講　図形と方程式
第５講　微分法・積分法
第６講　指数・対数・三角関数
第７講　ベクトル
第８講　数列
第９講　総合問題⑴
第 10 講　総合問題⑵

<講座の受講の仕方>

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で形成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。掲載されている問題はすべて実際に東北大学の入試に出題されたものですから，最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろいろな可能性を追ってみましょう。

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ 20 分です。もちろん, このまま続ければ(おそらく)最後の答えに行き着く！　というところまで行っている場合は，30 分まではかけて結構です。３問でおよそ１時間から１時間半。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じとってください。問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。 それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られています

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

から，先生はすべてを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」=「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありません。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です。もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…。明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いしますよ。そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね。

ちなみに各講義を通じ，この問題から得られることを「Point Pickup」と題して簡潔にお伝えいたします。自分で感じたことも含めテキストに残しておきましょう。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題や Point Pickup を見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったらノートを見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際にていねいに記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などで途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「模範解答」がついています。必要に応じ，画面を見る，またはプリントアウトして参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となりましょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講２題ずつ用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度もさまざまです。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。解答にはワンポイントのコメントもついています。この「練習問題」もまた，皆さんの成長のために厳選した

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に至ることができます。それはもしかしたら自分の力だけで到達したかもしれない領域です。しかし，もしそうであったとしても，そこに至る確実性の高いものがあるとしたら，それを選択することによって浮いた時間や労力をほかの学習に回すことができるでしょう。この講義がそういう目的をかなえるための存在であること，それは繰り返しますがサイクルを確実に構築した人だけがわかることです。皆さんの日々の努力，期待しています。

☆数学ⅠAⅡB 「おすすめの参考書」☆

この講義と同時並行で進めると効果的な書籍を以下に挙げておきます。学校の授業で課せられた課題等とのバランスを見ながら，着々と進めて行きましょう。

ちなみに数学の日々の自主学習において，詳細な解答がないものはまったくお勧めできません。答えに行き着く「プロセス」が数学であることは前述した通りです。最後の「答」しかない問題集やプリントではお話になりません。自分で考えれば必ず答にたどり着く！とおっしゃられる方もおりますが，「各知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」がまったく考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう。受験勉強，特に受験が近づいてきている時期に求められるのは，「時間対効果」です。

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」とする。以下に挙げるのはそんな本です。また，センター試験の勉強に本格的に入ると，数学の記述力が確実に落ちます。良問を通じた日々のたゆまぬ記述訓練がそれを防ぐことになるでしょう。

【入試突破のための基礎固め】

・「１対１対応の演習」（東京出版）

例題を元に，入試の典型的解法を身につけることができます。Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・Cの全６冊です。教科書およびチャート式などの参考書で積み上げてきた知識をもう一歩上の実力に代えるための本です。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【入試問題集】

・新数学スタンダード演習ⅠAⅡB　（東京出版）

入試の典型問題を網羅したものです。分野別となっていて，日々のペースメーカーに最適です。「大学への数学」という月刊誌の４月増刊号です。

増刊号ですから，入試が近づくにつれて各書店の在庫がなくなりますので注意してください。

・理系数学の良問プラチカ　数学ⅠAⅡB　（河合塾 SERIES）

良問と詳細な解説が掲載されており，自主学習に適しています。ちなみに「文系数学の良問プラチカ」は，この「理系数学」よりレベルが高いため最初に手をつけないように！

・東北大学　赤本　（教学社）

有名な過去問題集です。第一志望が決定したら購入しておきましょう。傾向を知る，というより近年こういうレベルの問題が出ている，ということを肌で感じることができます。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　２次関数・方程式・不等式

1　２次方程式 $x^2+bx+c=0$ が実数解をもち，２次方程式 $x^2-|b|x-|c|=0$ が正の解をもつとする．はじめの方程式の解の絶対値の小さくない方を α，あとの方程式の正の解を β とするとき，$|\alpha|$ と β の大小を比較せよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a，b を実数とし，

$$f(x)=x^2-2a|x|+b$$

とする．$|f(x)|=1$ を満たす実数 x の個数を N とする．

(1)　$a \leqq 0$ のとき，N の最大値を求めよ．

(2)　$N=6$ となるような点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 2 定点 B，C をそれぞれ，$(-1,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ する．点 A が直線 $y=a$ $(a>0)$ 上を動くとき，次の各問いに答えよ．

(1) △ABC の垂心（三角形の 3 頂点から対辺に下ろした垂線の交点）H のえがく図形の方程式を求めよ．

(2) 原点 O と H の距離の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　２次関数・方程式・不等式

1　２次方程式 $x^2+bx+c=0$ が実数解をもち，２次方程式 $x^2-|b|x-|c|=0$ が正の解をもつとする．はじめの方程式の解の絶対値の小さくない方を α，あとの方程式の正の解を β とするとき，$|\alpha|$ と β の大小を比較せよ．

$x^2+bx+c=0$ の２解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$

$f(x)=x^2+bx+c$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフの軸は　$x=-\dfrac{b}{2}$

$-\dfrac{b}{2}\leqq 0$　つまり　$b\geqq 0$ のとき　$\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\leqq 0$　　$|\alpha|=\dfrac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$

$b<0$ のとき　$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}>0$　　$|\alpha|=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$

よって，b にかかわらず　$|\alpha|=\dfrac{|b|+\sqrt{b^2-4c}}{2}$

また　$x^2-|b|x-|c|=0$　の２解は　$x=\dfrac{|b|\pm\sqrt{b^2+4|c|}}{2}$

$g(x)=x^2-|b|x-|c|$ とおくと，$y=g(x)$ のグラフの軸は $x=\dfrac{|b|}{2}\geqq 0$　　$f(0)=-|c|\leqq 0$

よって　$\beta=\dfrac{|b|+\sqrt{b^2+4|c|}}{2}$

したがって　$\beta-|\alpha|=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{b^2+4|c|}-\sqrt{b^2-4c}\right)$

ここで $|c|-(-c)=\begin{cases} c+c=2c>0 & (c>0) \\ -c+c=0 & (c\leqq 0) \end{cases}$ より

$c>0$ のとき　$|c|\geqq -c$　つまり　**$\beta>|\alpha|$**　　**$c\leqq 0$ のとき**　$|c|=-c$　つまり　**$\beta=|\alpha|$**

2　a，b を実数とし，

$$f(x)=x^2-2a|x|+b$$

とする．$|f(x)|=1$ を満たす実数 x の個数を N とする．

(1)　$a\leqq 0$ のとき，N の最大値を求めよ．

(2)　$N=6$ となるような点 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ．

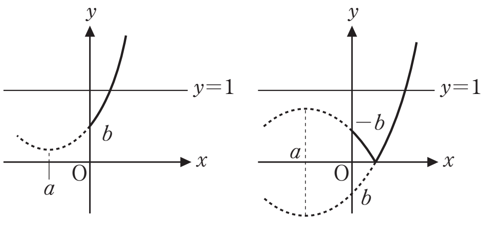
$$f(x)=x^2-2a|x|+b=\begin{cases} x^2-2ax+b=(x-a)^2-a^2+b & (x\geqq 0) & 軸:x=a \\ x^2+2ax+b=(x+a)^2-a^2+b & (x<0) & 軸:x=-a \end{cases}$$

$|f(x)|=1$ の解の個数，すなわち，$y=|f(x)|$ と $y=1$ のグラフの共有点の個数が N である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$y=|f(x)|$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフの x 軸より下の部分を上に折り返したものである．
また，$f(-x)=f(x)$ より $f(x)$ は偶関数でありグラフは y 軸対称である．よって，$x>0$ の部分を考え，$x<0$ に適用する（$x=0$ のときは y 軸上の点であることにも注目する）．

(1)　$a \leqq 0$ のとき　下のグラフより N の最大値は 4　$(b<-1)$



$b \geqq 0$ のとき　　$b<0$ のとき

(2)　$N=6$ となるのは(1)より $a>0$ のとき

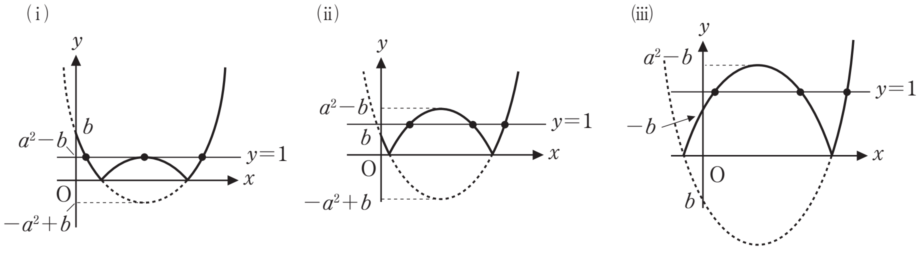
さらに，$x=0$ では $y=|f(x)|$ と $y=1$ のグラフが共有点をもたず，$x>0$ の部分で 3 個もつときを考える．

それは $y=|f(x)|$ グラフの頂点の y 座標 $-a^2+b>0$　つまり　$a^2-b>0$　のときである．

(i)　$0<a^2-b<b$ のとき　$a^2-b=1$

(ii)　$0 \leqq b<a^2-b$ のとき　$b<1<a^2-b$

(iii)　$b<0$ のとき　$-b<1<a^2-b$

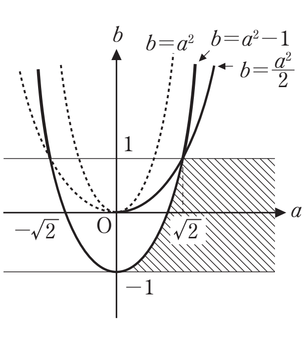


(i)〜(iii)より

$\dfrac{a^2}{2}<b<a^2$ のとき　$b=a^2-1$

$0 \leqq b<\dfrac{a^2}{2}$ のとき　$\begin{cases} b<a^2-1 \\ b<1 \end{cases}$

$b<0$ のとき　$-1<b<a^2-1$



よって，求める範囲は上図の太線および斜線部分（境界は含まれない）．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2定点B，Cをそれぞれ，(−1，0)，(1，0)とする．点Aが直線$y=a$ $(a>0)$上を動くとき，次の各問いに答えよ．

(1)　△ABCの垂心（三角形の3頂点から対辺に下ろした垂線の交点）Hのえがく図形の方程式を求めよ．

(2)　原点OとHの距離の最小値を求めよ．

(1)　A$(X,\ a)$とおくと，$X\neq -1$のときABの傾きは　$\dfrac{a}{X+1}$

よって，Cを通るABの垂線は　$y=\dfrac{-(X+1)}{a}(x-1)$

これは　$X=-1$のときも成り立つ．

点Hはこの直線上にあり，かつ，x座標$=X$である点である．

点Hのy座標は　$y=\dfrac{-(X+1)}{a}(X-1)=-\dfrac{1}{a}X^2+\dfrac{1}{a}$

よって　H$\left(X,\ -\dfrac{1}{a}X^2+\dfrac{1}{a}\right)$　　これは放物線　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{a}x^2+\dfrac{1}{a}}$ をえがく．

(2)　$\mathrm{OH}^2=X^2+\dfrac{1}{a^2}(X^2-1)^2$　　$x^2=t$とおくと　$t\geqq 0$

$$\mathrm{OH}^2=t+\frac{1}{a^2}(t-1)^2=\frac{1}{a^2}\{t^2-(2-a^2)t+1\}=\frac{1}{a^2}\left\{\left(t-\frac{2-a^2}{2}\right)^2-\frac{(2-a^2)^2}{4}+1\right\}$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(t-\frac{2-a^2}{2}\right)-\frac{1}{4}a^2+1$$

$0\leqq\dfrac{2-a^2}{2}$　つまり　$\boldsymbol{0<a\leqq\sqrt{2}}$ のとき　$t=\dfrac{2-a^2}{2}$で最小値　$\boldsymbol{\sqrt{-\dfrac{1}{4}a^2+1}}$

$\boldsymbol{\sqrt{2}<a}$ のとき　$t=0$で最小値　$\boldsymbol{\dfrac{1}{a}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a を実数とする．x についての方程式 $|x^2+ax+2a|=a+1$ が異なる実数解をちょうど2個もつような a の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面の 3 点 A(0, 0), B(2, 0), C(1, $\sqrt{3}$) を頂点とする△ABC に対して以下の問いに答えよ．

(1)　$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して，点 P(x, a) が△ABC の周または内部に含まれるための x の範囲を求めよ．

(2)　(1)の定数 a に対して，(1)で求められた範囲を x が動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(3)　点 P(x, y) が△ABC の周または内部に含まれるとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの点 P の座標 (x, y) を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

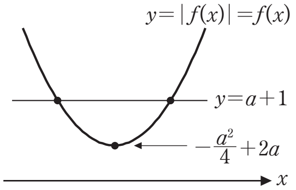
練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a を実数とする．x についての方程式 $|x^2+ax+2a|=a+1$ が異なる実数解をちょうど2個もつような a の値の範囲を求めよ．

解答例

$$f(x)=x^2+ax+2a=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+2a$$



(i)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a\geqq 0$ のとき

$a(a-8)\leqq 0$　つまり　$0\leqq a\leqq 8$　のとき

$y=f(x)$ のグラフはすべて x 軸より上側にある．

よって　$|f(x)|=f(x)$ より

$f(x)=a+1$ が異なる実数解を2個もつときを考えればよい．

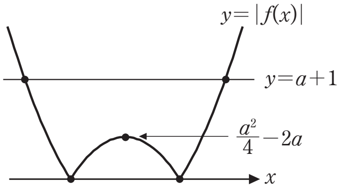
それは［グラフより $-\dfrac{a^2}{4}+2a<a+1$ のとき］であり，

「解の個数」は「グラフ」で扱う．
とくに注意すべきは
「つなぎ目」と「極値」である．

$a^2-4a+4>0$　　$(a-2)^2>0$　より　$a\neq 2$ のときである．

よって　$0\leqq a<2,\ 2<a\leqq 8$

(ii)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a<0$ のとき



つまり　$a<0,\ 8<a$　のとき

$y=f(x)$ のグラフは右図．

よって　$|f(x)|=a+1$ が異なる実数解を2個もつのは

［グラフより　$a+1=0$　または　$\dfrac{a^2}{4}-2a<a+1$ のとき］である．

$a=-1,\ a^2-12a-4<0$

つまり　$a=-1,\ 6-2\sqrt{10}<a<6+2\sqrt{10}$

よって　$a=-1,\ 6-2\sqrt{10}<a<0,\ 8<a<6+2\sqrt{10}$

(i)，(ii)より求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a=-1,\ 6-2\sqrt{10}<a<2,\ 2<a<6+2\sqrt{10}}$$

※［　　］は授業で触れたポイント．定着しているか確認しよう！

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面の3点 A(0, 0)，B(2, 0)，C$(1, \sqrt{3})$ を頂点とする△ABC に対して以下の問いに答えよ．

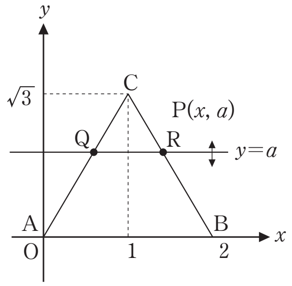
(1)　$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して，点 P(x, a) が△ABC の周または内部に含まれるための x の範囲を求めよ．

(2)　(1)の定数 a に対して，(1)で求められた範囲を x が動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ．

(3)　点 P(x, y) が△ABC の周または内部に含まれるとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの点 P の座標 (x, y) を求めよ．

解答例

△ABC は右図となり，1辺の長さが2の正三角形である．



(1)　$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき，直線 $y=a$ と辺 CA，CB との交点をそれぞれ Q，R とすると，x が Q，R の x 座標間に含まれればよい．

CA : $y=\sqrt{3}\,x$　より，Q の x 座標は　$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

CB : $y=\sqrt{3}\,(x-2)$　より，R の x 座標は　$2-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

ゆえに，求める範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq 2-\dfrac{a}{\sqrt{3}}}$

(2)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$

$=(x^2+a^2)+\{(x-2)^2+a^2\}+\{(x-1)^2+(a-\sqrt{3}\,)^2\}$

$=3x^2-6x+3a^2-2\sqrt{3}\,a+8$

$=3(x-1)^2+3a^2-2\sqrt{3}\,a+5$

$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき　$\dfrac{a}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq 2-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

グラフより明らかに $x=1$ はこの範囲に含まれる．

よって　$\boldsymbol{x=1}$ のとき　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ は最小値　$\boldsymbol{3a^2-2\sqrt{3}\,a+5}$　をとる．

(3)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値 $3a^2-2\sqrt{3}\,a+5$ を $f(a)$ とおくと，

$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ の範囲で a を動かしたとき

$f(a)=3\left(a-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+4$ は　$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小値4をとる．

このとき　$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ ←

これは三角形 ABC の「重心」である．予測をたて，結果と照らし合わせて検証することでさらに数学の力は伸びるであろう．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。